1. B_1 é uma bola esférica de volume V_1. B_2 é uma bola esférica de volume V_2, cujo raio é o triplo do raio de B_1.
Escolha a alternativa correta.
a) $V_2 = 3\ V_1$
b) $V_2 = 9\ V_1$
c) $V = 12\ V_1$
d) $V_2 = 27\ V_1$
e) $V_2 = 81\ V_1$

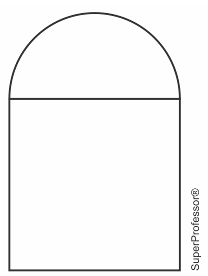
2. Os pontos A = (2,9), B = (2,3) e C = (c,0) são colineares.
Escolha a alternativa correta.
a) c = 0
b) c = 1
c) c = 2
d) c = 3
e) c = 4

3. Considere os números $a = cos(-\pi/5)$, $b = sen(\pi/5)$ e $c = tan(-\pi/5)$ (os ângulos são dados em radianos).
Escolha a alternativa correta.
a) a < b < c
b) a < c < b
c) b < a < c
d) c < a < b
e) c < b < a

4. Alberto olha o relógio e vê que ele marca 14h 15min. Exatamente 1000 minutos mais tarde, Alberto volta a olhar o relógio.
Sabendo-se que o relógio é preciso, que horas ele marca nesse momento?
a) 4h 15min
b) 4h 45min
c) 5h 55min
d) 6h 55min
e) 7h 35min

5. Um eletrodoméstico, custando inicialmente R$ 850,00, foi comprado com 10% de desconto e foi pago em 6 prestações iguais.
Qual foi o valor de cada prestação?
a) R$ 121,50
b) R$ 123,40
c) R$ 125,00
d) R$ 126,50
e) R$ 127,50

6. Uma moldura é formada pela justaposição de um semicírculo e um quadrado, como na figura abaixo.



Sabe-se que a área do semicírculo é $5\pi cm^2$.

Qual é a área do quadrado?
a) 10 cm^2
b) 20 cm^2
c) 30 cm^2
d) 40 cm^2
e) 50 cm^2

7. Em um concurso que oferecia 50 vagas de trabalho, 1700 pessoas se inscreveram.
Qual é a relação candidato por vaga nesse concurso?
a) 17 candidatos por vaga
b) 34 candidatos por vaga
c) 50 candidatos por vaga
d) 85 candidatos por vaga
e) 170 candidatos por vaga

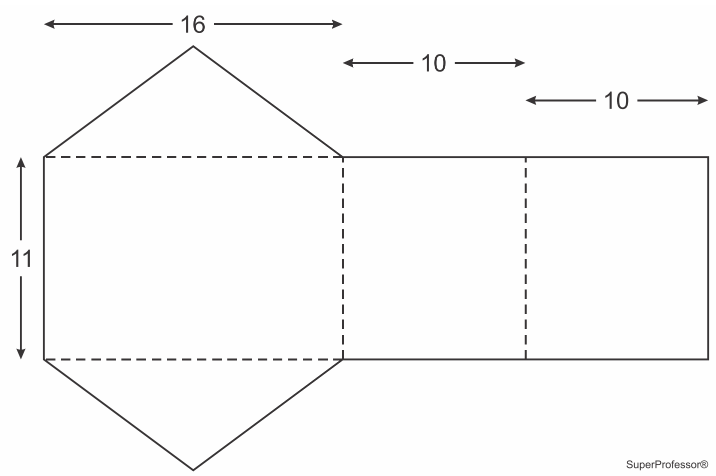
8. Considere o número $N = \frac{\left(-(7^{-1})+\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}$ e escolha a alternativa correta.

a) N = 22/21
b) N = 11/42
c) N = 8/21
d) N = 4/21
e) N = 34/21

9. Considere a progressão aritmética (P.A.) (a_n) de razão 2 e termo inicial $a_1 = 2$. Assim, por exemplo, $a_2 = 4$ e $a_3 = 6$. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por f(x) = 3x + 7. Defina $b_n = f(a_n)$: assim, por exemplo, $b_3 = 25$. Sabe-se que (b_n) também é uma progressão aritmética.

Qual é a razão da progressão aritmética (b_n)?
a) 3
b) 5
c) 6
d) 7
e) 13

10. Qual é o volume do sólido fechado formado com a dobra nas linhas pontilhadas da figura abaixo?



a) 480
b) 528
c) 880
d) 1760
e) 3520

11. P_1 é um paralelepípedo de base quadrada e volume V_1. P_2 é um paralelepípedo de base quadrada e volume V_2, tal que o lado da base é o dobro do lado da base de P_1 e a altura é o triplo da altura de P_1.

Escolha a alternativa correta.
a) $V_2 = 5\ V_1$
b) $V_2 = 12\ V_1$
c) $V_2 = 6\ V_1$
d) $V_2 = 18\ V_1$
e) $V_2 = 36\ V_1$

12. Os pontos A = (0,7), B = (5,0) e C = (c,3) são colineares.
Escolha a alternativa correta.
a) c = 7/5
b) c = 20/5
c) c = 21/4
d) c = 20/7
e) c = 56/5

13. Um aparelho eletrônico foi comprado com 10% de desconto e foi pago em 8 prestações iguais de R$ 135,00.
Qual era o valor do aparelho eletrônico antes do desconto?
a) R$ 1200,00
b) R$ 1210,00
c) R$ 1220,00
d) R$ 1230,00
e) R$ 1240,00

14. Um bolso tem R$ 4,75 em moedas de R$ 0,50 e de R$ 0,25. Sabe-se que uma moeda de R$ 0,50 pesa 7,81 g, e uma moeda de R$ 0,25 pesa 7,55 g. As moedas no bolso pesam 107 g no total.

Quantas moedas de R$ 0,25 há no bolso?
a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

15. Preciso ler um livro de muitas páginas. Meu planejamento de leitura é começar lendo 10 páginas no primeiro dia e a cada dia ler duas páginas a mais que no dia anterior. No terceiro dia, por exemplo, vou ler 14 páginas.

Assim, quantas páginas no total vou ter lido nos primeiros 20 dias?
a) 168
b) 200
c) 384
d) 460
e) 580

16. Seja a > 0. Considere um cubo com aresta medindo a e um prisma reto com altura a cuja base é um triângulo equilátero com lado medindo 2.
Se o volume do cubo é igual ao volume do prisma, qual é o valor de a?
a) $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$
b) $2\sqrt[4]{3}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\sqrt{3}$
e) $\sqrt[4]{3}$

17. Seja x a solução da equação

$$((\frac{x}{(sen(\frac{\pi}{3}}))) - 1) = \sqrt{12}.$$

O ângulo que aparece na equação está dado em radianos.

Escolha a alternativa correta.
a) $x = \sqrt{3} + 1$
b) $x = \sqrt{3} + (1/2)$
c) $x = (\sqrt{3}/2) + 3$
d) $x = \sqrt{3} + 6$
e) $x = (\sqrt{3} + 1)/2$

18. Em uma turma de 10 alunos, qual é a probabilidade de que, pelo menos, dois tenham nascido no mesmo dia da semana?
a) 100%
b) 70%
c) 50%
d) 10%
e) 0%

19. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, uma função quadrática. Sabe-se que f (0) = 5, f(1) = 10 e f(5) = 10.
Quanto vale f (3)?
a) -28
b) -22
c) 4
d) 14
e) 12

20. O triângulo ABC tem vértices A = (a, 0), B = (2, 2) e C = (0, 4). Sabe-se que a área do triângulo ABC é igual a 3.
Sabendo-se que $a \neq 1$, o que se pode deduzir sobre o valor de a?
a) a = 7
b) a = 8
c) a = 9
d) a = 10
e) a = 11

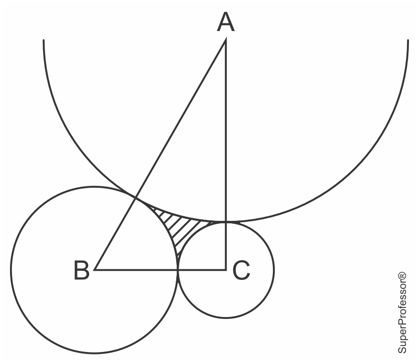
21. Em cada item abaixo, determine o conjunto solução da equação ou inequação, ou seja, o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem cada equação ou inequação.

a) $\frac{1}{2} - \frac{x+3}{5} = \frac{\frac{4}{3}}{5}$
b) $|5x - 2| \geq 1$
c) $|||x - 6| - 4| - 3| \leq \frac{1}{2}$

22. Seja ABC um triângulo retângulo em C. Sabe-se que o cateto BC mede 1 e que a hipotenusa AB mede 2.

a) Quanto mede o cateto AC?

b) Traçam-se círculos de centros A, B, C e raios r_A, r_B, r_C que se tangenciam exteriormente, dois a dois, como mostrado na figura.



Calcule os raios r_A, r_B e r_C.

c) Considere a região R interior ao triângulo ABC e exterior aos três círculos descritos no item anterior, como indica a figura. Calcule a área da região R.

23. Seja $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ a curva de equação $y = 4x^3 - 3x$.

a) Qual é a interseção de Γ com a reta vertical de equação $x = 1$?
b) Considere a reta r_{-1}, que passa pelo ponto (1, 1), tem coeficiente angular –1 e, portanto, equação $(y-1) = (-1)(x-1)$. Qual é a interseção de Γ com a reta r_{-1}?
c) Considere a reta r_m, que passa pelo ponto (1, 1) e tem coeficiente angular m. Quantos pontos de interseção distintos existem entre a curva Γ e a reta r_m?
Sua resposta deve ser dada em função de m e, se necessário, dividida em casos.

24. Em uma urna, há 6 bolas vermelhas, 6 bolas amarelas, 6 bolas verdes e 6 bolas azuis.

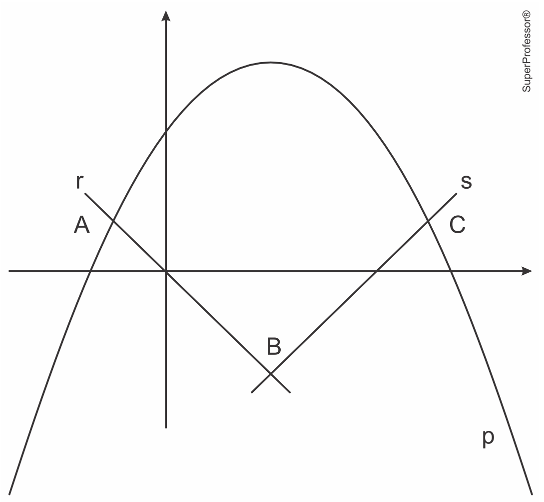
a) Jorge tira uma bola ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela seja azul?
b) Depois de repor a bola e sacudir a urna, Jorge tira duas bolas ao acaso. Qual é a probabilidade de que elas sejam da mesma cor?
c) Depois de repor as bolas e sacudir a urna, Jorge vai tirar uma bola de cada vez até ter tirado pelo menos uma de cada cor e, então, ele vai parar e contar as bolas que tirou. Assim, qual é a probabilidade de que ele tire exatamente 5 bolas?

25. Em cada item abaixo, determine o conjunto solução da equação ou inequação, ou seja, o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem cada equação ou inequação.

a) $\frac{1}{x} = 2$
b) $\frac{1}{x} < 2$
c) $(5x-2)(x+\sqrt{3})(x-7)(x^2+3) = 0$

26. Sejam r e s retas, p uma parábola e A, B, C pontos distintos, satisfazendo:

I. As retas r e s são perpendiculares;
II. O vértice da parábola p é o ponto (2,4);
III. A = (–1, 1) é o ponto de interseção entre a reta r e a parábola p que está à esquerda do vértice da parábola p;
IV. B = (2, –2) é o ponto de interseção entre as retas r e s;
V. C é o ponto de interseção entre a reta s e a parábola p que está à direita do vértice da parábola p.



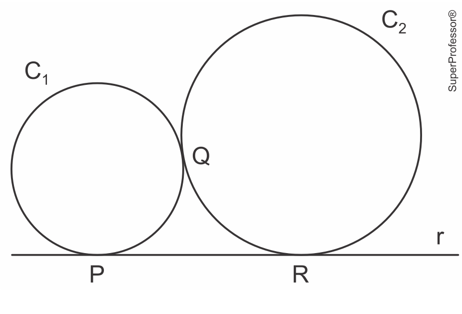
a) uma equação para a reta r;
b) uma equação para a parábola p;
c) uma equação para a reta s e as coordenadas do ponto C.

27. Fábio sai de casa com R$ 200,00.

a) No supermercado, ele gasta 25% do que tem no bolso ao entrar. Com quanto dinheiro ele sai do supermercado?
b) Depois do supermercado, Fábio gasta na farmácia metade do que foi gasto no supermercado. Que porcentagem do que ele tinha no bolso, ao entrar na farmácia, foi gasto nela?
c) Depois disso, Fábio passou pela padaria, comprou pão e voltou para casa. Ao chegar em casa verificou que tinha R$ 110,00 no bolso. Quanto Fábio gastou na padaria?

28. Sejam C_1 e C_2 duas circunferências, r uma reta e P, Q, R três pontos distintos, satisfazendo:

I. $C_1 \cap r = \{P\}$;
II. $C_1 \cap C_2 = \{Q\}$;
III. $C_2 \cap r = \{R\}$;
IV. O raio de C_1 é 4;
V. A distância entre P e R é 10.



Determine as distâncias abaixo:

a) entre Q e o centro da circunferência C_1;
b) entre R e o centro da circunferência C_1;
c) entre Q e o centro da circunferência C_2.

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[D]

Sejam r_1 e r_2, respectivamente, os raios de B_1 e B_2. Logo, se $r_2 = 3 \cdot r_1$, então

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{4\pi}{3} \cdot r_2^3 \\ &= \frac{4\pi}{3} \cdot (3r_1)^3 \\ &= 27 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot r_1^3 \\ &= 27 \cdot V_1. \end{aligned}$$

Resposta da questão 2:
[C]

Se $A,\ B$ e C estão alinhados, então

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & c & 2 \\ 9 & 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6 + 9c - 18 - 3c = 0$$
$$\Leftrightarrow 6c = 12$$
$$\Leftrightarrow c = 2.$$

Resposta da questão 3:
[E]

Desde que $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, temos $cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = cos\frac{\pi}{5} > cos\frac{\pi}{4} > 0$, $0 < sen\frac{\pi}{5} < sen\frac{\pi}{4} = cos\frac{\pi}{4}$ e $tg\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -tg\frac{\pi}{5} < 0$. Em consequência, vem $c < b < a$.

Resposta da questão 4:
[D]

Como $1000\, min = 16\ h\ 40 min$, segue que a resposta é $6\ h\ 55 min$.

Resposta da questão 5:
[E]

A resposta é $\frac{0{,}9 \cdot 850}{6} = \text{R\$ } 127{,}50$.

Resposta da questão 6:
[D]

Se r é a medida do raio do semicírculo, em cm, então o lado do quadrado mede $2r cm$.
Queremos calcular o valor de $(2r)^2 = 4r^2$.
Sabendo que a área do semicírculo mede $5\pi\ cm^2$, temos

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 5\pi \Leftrightarrow r^2 = 10$$
$$\Leftrightarrow 4r^2 = 40\ cm^2.$$

Resposta da questão 7:
[B]

A resposta é $\frac{1700}{50} = 34$ candidatos por vaga.

Resposta da questão 8:

[A]

Tem-se que

$$\begin{aligned} N &= \frac{-\frac{1}{7}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-3+14}{21}\cdot 2 \\ &= \frac{22}{21}. \end{aligned}$$

Resposta da questão 9:
[C]

Tem-se que

$$\begin{aligned} a_n &= 2+(n-1)\cdot 2 \\ &= 2n. \end{aligned}$$

Se r é a razão da progressão aritmética (b_n), com $n \in \mathbb{N}^*$, então

$$\begin{aligned} r &= b_{n+1} - b_n \\ &= f(a_{n+1}) - f(a_n) \\ &= 3\cdot(2n+2)+7-(3\cdot 2n+7) \\ &= 6. \end{aligned}$$

Resposta da questão 10:
[B]

O sólido é um prisma triangular reto de altura 11, e cuja base é um triângulo isósceles de lados 10, 10 e 16. Desse modo, a resposta é $\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 6\cdot 11 = 528$.

Resposta da questão 11:
[B]

Sejam ℓ e h, respectivamente, a aresta da base e a altura de P_1. Logo, temos

$$\begin{aligned} V_2 &= (2\ell)^2\cdot 3h \\ &= 12\cdot \ell^2 \cdot h \\ &= 12\cdot V_1. \end{aligned}$$

Resposta da questão 12:
[D]

Se $A,\ B$ e C são colineares, então

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & c & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 15 + 7c - 35 = 0$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{20}{7}.$$

Resposta da questão 13:
[A]

O valor total pago foi $135 \cdot 8 = \text{R\$ } 1.080{,}00$. Logo, se v era o valor do aparelho eletrônico antes do desconto, então
$0{,}9\cdot v = 1080 \Leftrightarrow v = \text{R\$ } 1.200{,}00.$

Resposta da questão 14:
[C]

Sejam x e y, respectivamente, o número de moedas de $\text{R\$ } 0{,}50$ e o número de moedas de $\text{R\$ } 0{,}25$. Logo, tem-se que $0{,}5x + 0{,}25y = 4{,}75$ e $7{,}81x + 7{,}55y = 107$. Pondo x em função de y na primeira equação, encontramos $x = 9{,}5 - 0{,}5y$. Desse modo, vem

$$7{,}81 \cdot (9{,}5 - 0{,}5y) + 7{,}55y = 107 \Leftrightarrow 3{,}645y = 32{,}805$$
$$\Leftrightarrow y = 9.$$

Resposta da questão 15:
[E]

O número de páginas lidas por dia cresce segundo uma progressão aritmética de primeiro termo 10 e razão igual a 2. Logo, segue que a resposta é dada por

$$\left(\frac{10 + 10 + 19 \cdot 2}{2}\right) \cdot 20 = (10 + 19) \cdot 20$$
$$= 580.$$

Resposta da questão 16:
[E]

Se $a > 0$ e os volumes dos sólidos são iguais, então

$$a^3 = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot a \Rightarrow a^2 = \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow a = \sqrt[4]{3}.$$

Resposta da questão 17:
[C]

Tem-se que

$$\frac{x}{sen\,\frac{\pi}{3}} - 1 = \sqrt{12} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{12} + 1$$
$$\Leftrightarrow x = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Resposta da questão 18:
[A]

Considerando os dias de aniversário na semana de 10 alunos, podemos afirmar, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que em no mínimo um dia da semana haverá $\left\lfloor \frac{10-1}{7} \right\rfloor + 1 = 2$ aniversariantes.
Desse modo, trata-se de um evento certo e, portanto, a resposta é 100%.

Resposta da questão 19:
[D]

Se $f(1) = f(5) = 10$, então $x = \frac{1+5}{2} = 3$ é a abscissa do vértice da parábola. Logo, a forma canônica da lei de f é

$$f(x) = a \cdot (x - 3)^2 + k,$$

com k sendo $f(3)$.
Portanto, se $f(0) = 5$ e $f(1) = 10$, então

$$\begin{cases} 5 = a\cdot(0-3)^2+k \\ 10 = a\cdot(1-3)^2+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 9a+k \\ 10 = 4a+k \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ k = 14 \end{cases}.$$

Resposta da questão 20:
[A]

Se $(ABC) = 3$ e $a \neq 1$, então

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right| = 3 \Leftrightarrow |8+2a-4a| = 6$$
$$\Rightarrow 8-2a = -6$$
$$\Leftrightarrow a = 7.$$

Resposta da questão 21:
a) Tem-se que

$$\frac{1}{2} - \frac{x+3}{5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow 5-2x-6 = \frac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{11}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{11}{6}$$

A resposta é $S = \left\{-\frac{11}{6}\right\}$.

b) Tem-se que

$$|5x-2| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2 \geq 1 \\ \text{ou} \\ 5x-2 \leq -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{5} \text{ ou } x \geq \frac{3}{5}.$$

A resposta é $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x \leq \frac{1}{5} \text{ ou } x \geq \frac{3}{5}\right\}$.

c) Tem-se que

$$|||x-6|-4|-3| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+3 \leq ||x-6|-4| \leq \frac{1}{2}+3$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq ||x-6|-4| \leq \frac{7}{2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ||x-6|-4| \leq \frac{7}{2} \\ ||x-6|-4| \geq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Daí, vem

$$-\frac{7}{2} \leq |x-6|-4 \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq |x-6| \leq \frac{15}{2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-6| \leq \frac{15}{2} \\ |x-6| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{15}{2} \leq x-6 \leq \frac{15}{2} \\ x-6 \geq \frac{1}{2} \text{ ou } x-6 \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} \le x \le \frac{27}{2} \\ x \le \frac{11}{2} \text{ ou } x \ge \frac{13}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow S_I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} \le x \le \frac{11}{2} \text{ ou } \frac{13}{2} \le x \le \frac{27}{2}\right\}$$

e

$$\begin{vmatrix} |x-6|-4 \le -\frac{5}{2} \\ \text{ou} \\ |x-6|-4 \ge \frac{5}{2} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} |x-6| \le \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ |x-6| \ge \frac{13}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} \le x-6 \le \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ x-6 \le -\frac{13}{2} \text{ ou } x-6 \ge \frac{13}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{9}{2} \le x \le \frac{15}{2} \\ \text{ou} \\ x \le -\frac{1}{2} \text{ ou } x \ge \frac{25}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow S_{II} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{9}{2} \le x \le \frac{15}{2} \text{ ou } x \ge \frac{25}{2}\right\}.$$

Em consequência, temos

$$S = S_I \cap S_{II}$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} \le x \le -\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{9}{2} \le x \le \frac{11}{2} \text{ ou } \frac{13}{2} \le x \le \frac{15}{2} \text{ ou } \frac{25}{2} \le x \le \frac{27}{2}\right\}.$$

Resposta da questão 22:

a) Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow 2^2 = \overline{AC}^2 + 1^2$$
$$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{3}.$$

b) Desde que $r_A + r_B = 2$ e $r_B + r_C = 1$, temos $r_A - r_C = 1$. Ademais, como $r_A + r_C = \overline{AC}$ e $\overline{AC} = \sqrt{3}$, encontramos facilmente $r_A = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $r_B = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ e $r_C = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

c) Desde que

$$sen\, A\hat{B}C = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow sen\, A\hat{B}C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow A\hat{B}C = 60°,$$

temos $B\hat{A}C = 90 - A\hat{B}C = 30°$.

A resposta é

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 - \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{90°}{360°} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 - \frac{30°}{360°} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 =$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \cdot \frac{6-3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2} =$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{5-2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Resposta da questão 23:

a) Pondo $x = 1$ na equação de Γ, vem

$$y = 4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1$$
$$= 1.$$

Assim, a interseção de Γ com a reta $x = 1$ é o ponto $(1,\ 1)$.

b) A equação explícita da reta r_{-1} é $y = -x + 2$. Logo, temos

$$4x^3 - 3x = -x + 2 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x - 2 = 0.$$

Como $(1,\ 1)$ pertence a Γ e a r_{-1}, segue que

$$4x^3 - 2x - 2 = (x - 1) \cdot (4x^2 + 4x + 2) = 0.$$

Desse modo, como o discriminante do trinômio $4x^2 + 4x + 2$ é negativo, podemos afirmar que o único ponto de interseção de Γ e r_{-1} é o ponto $(1,\ 1)$.

c) A equação explícita da reta r_m é $y = mx - m + 1$. Assim, vem

$$4x^3 - 3x = mx - m + 1 \Leftrightarrow 4x^3 - (m + 3)x + m - 1 = 0.$$

Como $(1,\ 1)$ pertence a Γ e a r_m, temos

$$4x^3 - (m + 3)x + m - 1 = (x - 1) \cdot (4x^2 + 4x - m + 1) = 0.$$

Em consequência, sendo o discriminante do trinômio $4x^2 + 4x - m + 1$ igual a $16m$, temos quatro casos a considerar:

i) Se $m > 0$ e $x = 1$ também é raiz de $4x^2 + 4x - m + 1 = 0$. Nesse caso, vem

$$1 = \frac{-4 \pm 4\sqrt{m}}{8} \Rightarrow m = 9.$$

Portanto, os pontos de interseção são $(1,\ 1)$ e $(-2,\ -26)$.

ii) Se $m > 0$ e $x = 1$ não é raiz de $4x^2 + 4x - m + 1 = 0$. Nesse caso, temos $m \neq 9$ e, assim, os pontos de interseção são $(1,\ 1)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{m}}{2},\ \frac{-3m+m\sqrt{m}+2}{2}\right)$ e $\left(\frac{-1-\sqrt{m}}{2},\ \frac{-3m-m\sqrt{m}+2}{2}\right)$.

iii) Se $m = 0$, então os pontos de interseção são $(1,\ 1)$ e $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$.

iv) Se $m < 0$, então o único ponto de interseção é $(1,\ 1)$.

Resposta da questão 24:

a) A urna possui $6 \cdot 4 = 24$ bolas, inclusive 6 azuis. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

b) A probabilidade de retirar duas bolas de uma determinada cor é $\frac{6}{24} \cdot \frac{5}{23} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{23}$. Portanto, como há 4 cores disponíveis, segue que a probabilidade pedida é $4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{23} = \frac{5}{23}$.

c) Para que sejam retiradas exatamente cinco bolas, é necessário que, das quatro primeiras bolas extraídas, duas sejam da mesma cor e as outras duas sejam de cores distintas. Por exemplo, se $A,\ B,\ C$ e D são as cores, então $ABBD$ seria um caso favorável. Nesse caso, a quinta bola extraída deveria ser, necessariamente, da cor C.

Desse modo, considerando as quatro primeiras bolas extraídas, existem 4 maneiras de escolher a cor repetida e $\binom{3}{2} = 3$ maneiras de escolher a cor das outras duas bolas.

Ademais, existem $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ modos de escolher as duas bolas de mesma cor e $\binom{6}{1} = 6$ maneiras de escolher cada uma das outras duas bolas. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $4 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 6$ maneiras de escolher as quatro primeiras bolas, conforme o desejado.

Por outro lado, existem $\binom{24}{4} = \frac{24!}{4! \cdot 20!} = 3 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 7$ modos de escolher 4 bolas quaisquer.

Em consequência, a probabilidade de retirar as quatro primeiras bolas de acordo com o exposto é

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 7} = \frac{1080}{1771}.$$

A quinta bola deverá ser da cor que falta. A probabilidade disso ocorrer é $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

A resposta, portanto, é

$\frac{1080}{1771} \cdot \frac{3}{10} = \frac{324}{1771}$.

Resposta da questão 25:

a) Tem-se que

$$\frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

A resposta é $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) Se $x > 0$, então

$$\frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Se $x < 0$, então $\frac{1}{x} < 0 < 2$.

A resposta é $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right\}$.

c) Se $(5x - 2)(x + \sqrt{3})(x - 7)(x^2 + 3) = 0$, então $5x - 2 = 0$ ou $x + \sqrt{3} = 0$ ou $x - 7 = 0$ ou $x^2 + 3 = 0$. Logo, tem-se $x = \frac{2}{5}$ ou $x = -\sqrt{3}$ ou $x = 7$. Note que $x^2 + 3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A resposta é $S = \left\{-\sqrt{3},\ \frac{2}{5},\ 7\right\}$.

Resposta da questão 26:

a) Como r passa pela origem e pelo ponto $(-1,\ 1)$, segue que

$$-1 = m_r \cdot 1 \Leftrightarrow m_r = -1.$$

Logo, uma equação de r é $y = -x$.

b) A equação canônica da parábola é $y = a \cdot (x - \alpha)^2 + \beta$, em que α e β são as coordenadas do vértice da parábola. Assim, como a parábola também passa pelo ponto $(-1,\ 1)$, temos

$$1 = a \cdot (-1 - 2)^2 + 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

A resposta é $y = -\frac{1}{3}(x - 2)^2 + 4$.

c) Como r e s são perpendiculares, temos $m_s \cdot m_r = -1$. Daí, temos $m_s = 1$. Ademais, como B pertence a s, vem

$$y - (-2) = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = x - 4.$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 = 3 \cdot (4 - y) &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 3 \cdot (8 - x) \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 5.\end{aligned}$$

Sabendo que C é um ponto do primeiro quadrante, vem $x_C = 5$ e, assim, $y_C = 5 - 4 = 1$.

Resposta da questão 27:

a) A resposta é $(1 - 0{,}25) \cdot 200 = \text{R\$ } 150{,}00$.

b) Ele gastou $\frac{0{,}25\cdot 200}{2} = \text{R\$ }25{,}00$ na farmácia, o que corresponde a $\frac{25}{150}\cdot 100\% \cong 16{,}7\%$ do que ele tinha no bolso ao entrar na farmácia.

c) Ele saiu da padaria com $150 - 25 = \text{R\$ }125{,}00$. Logo, ele gastou $125 - 110 = \text{R\$ }15{,}00$ na padaria.

Resposta da questão 28:

a) A distância entre Q e o centro de C_1 corresponde à medida do raio de C_1, ou seja, 4.

b) Seja O_1 o centro de C_1. Logo, como C_1 tangencia r em P, segue que $O_1\hat{P}R$ é reto. Daí, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\overline{O_1R}^2 = \overline{O_1P}^2 + \overline{PR}^2 \Rightarrow \overline{O_1R}^2 = 4^2 + 10^2$$
$$\Rightarrow \overline{O_1R} = 2\sqrt{29}.$$

c) Sejam O_2 e S, respectivamente, o centro de C_2 e o pé da perpendicular conduzida por O_1 sobre O_2R. Assim, temos $\overline{O_1O_2} = r_2 + 4$, $\overline{O_1S} = \overline{PR} = 10$ e $\overline{O_2S} = r_2 - 4$. Donde, pelo Teorema de Pitágoras, encontramos

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_2S}^2 + \overline{O_1S}^2 \Rightarrow (r_2+4)^2 = (r_2-4)^2 + 10^2$$
$$\Rightarrow r_2 = \frac{25}{4}.$$